Arbeitspapiere und Materialien zur deutschen Sprache

amades

Reinhold Schmitt (Hg.)

Unterricht ist Interaktion!

Analysen zur *De-facto*-Didaktik

Herausgegeben vom Institut für Deutsche Sprache

41

Stefan Jörissen

‘Ungleichungen zeigen’: Das Lösen von Übungsaufgaben im Mathematikunterricht

1. Einleitung

Der Lehrer, der an der Tafel steht und rechnet, gilt als Inbegriff des Mathematikunterrichts. Der Topos kommt nicht von ungefähr: Das Lösen von Übungsaufgaben im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch nimmt bei der Vermittlung von Mathematik zumindest in den oberen Schulstufen nach wie vor eine wichtige Stellung ein. Doch was macht eine Lehrperson genau, wenn sie gemeinsam mit den Lernenden eine Übungsaufgabe löst?

Der vorliegende Beitrag gibt eine empirisch fundierte Antwort auf diese Frage. Er beruht auf audiovisuellen Aufnahmen, die in einer Mathematikstunde an einer Fachhochschule entstanden. Die Analyse zeichnet das konkrete Handeln eines Dozenten nach, der an der Tafel die Lösung einer Übungsaufgabe zu Ungleichungen erarbeitet. Der Dozent reagiert damit auf die Bemerkung einer Studentin, sie könne mit dem Thema ‘Ungleichungen’ „*gar nichts anfangen*“. Das Lösen der Aufgabe lässt sich also als *Verfahren* konzeptionalisieren, mit dem der Dozent eine konkrete *Anforderung* bearbeitet, die sich aus der Interaktion mit den Studierenden ergeben hat.

Die Analyse des Unterrichtsausschnitts zeigt die Konstituenten dieses Verfahrens auf. Sie macht aber auch deutlich, dass der Dozent durch die Anwendung dieses Verfahrens in spezifischer Weise auf Bedingungen reagiert, die durch die situative und institutionelle Rahmung gegeben sind.

Der Beitrag beschreibt zunächst den Kontext, in den die betrachtete Stunde eingebettet ist (Kap. 2), und bietet einen Überblick über den analysierten Unterrichtsausschnitt (Kap. 3). Die folgenden Ausführungen konturieren die Anforderung, mit welcher der Dozent konfrontiert ist (Kap. 4). Kernstück des Beitrags ist die detaillierte Analyse des Verfahrens, mit denen der Dozent auf diese Anforderung reagiert (Kap. 5). Die anschließende Diskussion des angewendeten Verfahrens geht der Frage nach, welche Implikationen zu Funktion und Stellenwert von Übungsaufgaben dem Unterrichtsausschnitt zugrunde liegen (Kap. 6.1). Danach werden die Konstituenten (Kap. 6.2) und die Adressatenorientierung (Kap. 6.3) des analysierten Verfahrens zusammenfassend dargestellt. Es folgt eine Reflexion der Chancen und Risiken des gemeinsamen Lösens von Übungsaufgaben aus didaktischer Sicht (Kap. 6.4 und 6.5). Ein weiteres Kapitel geht auf alternative Verfahren ein, die als Reaktion auf die entstandene Anforderung denkbar sind (Kap. 7). Ein Fazit schließt den Beitrag ab (Kap. 8).

2. Kontext des betrachteten Unterrichtsausschnitts

Die analysierte Aufnahme entstand im Rahmen eines Forschungsvorhabens, für das insgesamt 30 Stunden audiovisuell aufgezeichnet wurden. Sie zeigt eine Mathematikstunde an einer technisch ausgerichteten Schweizer Fachhochschule. Bei den Studierenden handelt es sich um Studienanfänger, die mehrheitlich zwischen 18 und 23 Jahren alt sind, beim Dozenten um einen etwa 45-jährigen Mathematiker, der über eine didaktisch-methodische Ausbildung verfügt und auf mehrere Jahre Erfahrung als Fachhochschul-Dozent zurückblicken kann. Der Unterricht wird als Klassenunterricht durchgeführt, die Klasse setzt sich aus 20 Studierenden zusammen, die Geschlechterverteilung ist ausgeglichen.

Die Aufnahme entstand in der 7. Semesterwoche des ersten Semesters, die Studierenden stehen somit erst am Anfang ihres Studiums. Die institutionelle Sozialisierung – die Adaptation an die expliziten und impliziten Verhaltenskodizes der Hochschule und die Internalisierung des Selbstverständnisses einzelner Unterrichtsfächer – ist also noch nicht abgeschlossen. Als Voraussetzung für einen Eintritt in den Studiengang, den die Studierenden belegen, ist eine Maturität[1] erforderlich. Ansonsten bestehen keine zusätzlichen Zugangsbeschränkungen, insbesondere wird für den (technischen) Studiengang formal keine spezifisch mathematisch-naturwissenschaftliche Vorbildung auf der Maturitätsstufe verlangt. Dies führt dazu, dass das mathematische Vorwissen der Studierenden stark divergiert.

Das erste Studienjahr hat entsprechend einen selektiven Charakter: Der Dozent schätzte in einer inoffiziellen Unterhaltung, dass etwa die Hälfte der Studierenden das Studium nach dem ersten Jahr wegen ungenügender Leistungen (unter anderem) im Fach Mathematik nicht fortsetzen könne. Diese hohe Quote ist auch den Studierenden bewusst. Die Beobachtungen in der Klasse zeigten, dass diese unter enormem Leistungsdruck stehen und die Frage, wo sie sich im Mathematikunterricht innerhalb der Klasse leistungsmäßig positionieren können, für sie hohe Relevanz hat.

---

[1] Als *Maturität* (auch *Matur* oder *Matura*) wird in der Schweiz die bestandene Reifeprüfung bezeichnet, deren Bestehen zum Studium an einer Hochschule berechtigt. Die Maturitätsstufe, die auf die Maturitätsprüfung vorbereitet, umfasst mindestens die Schulzeit von der 10. bis zur 12. Klasse.

3. Überblick über den Unterrichtsausschnitt

Beim ausgewählten Unterrichtsausschnitt handelt es sich um die letzten neun Minuten einer Mathematik-Doppelstunde. Der Dozent hat soeben eine Anwendungsaufgabe zu linearen Funktionen abgeschlossen. Diese Funktionen bildeten das erste große Thema des Semesters, und aufgrund des Semesterprogramms ist klar, dass der Dozent bald zum nächsten Hauptthema übergehen wird.

Der folgende Unterrichtsverlauf bis zum Ende der Stunde lässt sich in drei Phasen gliedern: eine Transitionsphase, eine Arbeitsphase und eine Abschlussphase. Im Folgenden wird der Unterrichtsausschnitt zunächst zusammengefasst.

3.1 Transitionsphase

Der Dozent fragt die Studierenden, ob sie „*noch Fragen*" zum bisher behandelten Stoff haben, und stellt mit einem Blick auf seine Armbanduhr fest, er könne auf etwaige Fragen „*noch kurz*" eingehen:

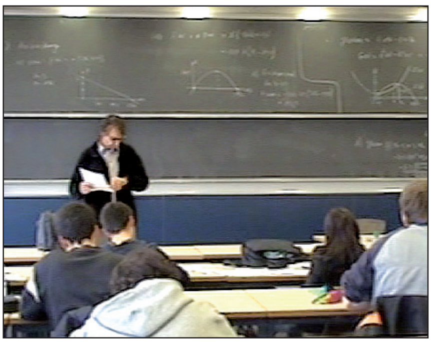


Bild 1: Blick auf die Armbanduhr in der Transitionsphase.

Daraufhin meldet sich Maria, eine Studentin, und sagt, dass sie „*die Ungleichungen noch nie besprochen*" hätten. Ihre Aussage erstaunt insofern, als das Thema 'Ungleichungen' schon in der Maturitätsschule eingeführt wird[2] und zudem Gegenstand der letzten Stunden war. Auf eine Rückfrage des Dozenten („*nein?*") entgegnet sie, dass sie „mit den Ungleichungen gar nichts anfangen" könne. Andere Studierende äußern sich nicht. Noch bevor die Studentin präzisiert, dass sie „mit den Übungen" nichts anfangen könne, greift der Dozent zu seinen Unterlagen und beginnt, darin zu blättern (Bild 2). Er kündigt

2 Vgl. Bundesamt für Berufsbildung und Technologie (2003, S. 33f.).

mit den Worten „*Gut, dann zeig' ich die Ungleichungen mal*“ den weiteren Unterrichtsverlauf an und nennt die Nummer einer Aufgabe aus den Unterlagen. Er stellt damit klar, dass diese Aufgabe nun gelöst werden soll.

Bild 2: Suche nach einer geeigneten Übungsaufgabe in der Transitionsphase.

3.2 Arbeitsphase

In der ausgewählten Aufgabe soll die Menge aller Punkte (x, y), welche die Bedingung ‘$(1 \leq x < 4)$ $(0 \leq y \leq x)$’ erfüllen, in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Der Dozent bearbeitet nun in einem klassischen fragend-entwickelnden Lehrgespräch[3] diese Aufgabe: Er überträgt zuerst die gegebene Bedingung von den Unterlagen an die Tafel und kommentiert sie. Danach schlüsselt er in einem ersten Schritt die Bedingung in vier Teilbedingungen auf, die er ebenfalls an der Tafel notiert. In einem zweiten Arbeitsschritt notiert er zu jeder Teilbedingung die Geradengleichung der entsprechenden Begrenzungsgeraden. Er zeichnet in einem dritten Arbeitsschritt ein Koordinatensystem und trägt darin die Begrenzungsgeraden ein, die durch die vier Geradengleichungen gegeben sind. Schließlich schraffiert er die resultierende Fläche, die der gesuchten Menge entspricht. Die Studierenden beteiligen sich durch einige Wortmeldungen an der Lösung der Aufgabe.

Auch Maria steuert zu Beginn der Arbeitsphase einen Beitrag zur Lösung bei. Im weiteren Verlauf der Berechnung bittet sie den Dozenten, einen Gedankengang nochmals zu erläutern. Dieser geht kurz auf ihr Anliegen ein. Da ihr der Arbeitsschritt offenbar nach wie vor nicht plausibel erscheint, bittet sie den Studenten neben ihr um eine Erläuterung.

[3] Vgl. dazu Becker-Mrotzek / Vogt (2009, S. 77-108) und Maier / Schweiger (1999, S. 134-156).

Gegen Ende der Arbeitsphase schlägt ein Student einen alternativen Lösungsweg vor, der „*viel einfacher*“ als das vom Dozenten gewählte Vorgehen sei. Der Dozent gibt ihm Recht: Der Vorschlag des Studenten stelle eine Möglichkeit dar, die Herleitung der Lösung „*ab*[*zu*]*kürzen*“. Der Dozent rechtfertigt sein Vorgehen jedoch mit einer didaktischen Überlegung: Für Studierende, die im Umgang mit „*Übung*[*en*] *dieser Art*“ noch keine Erfahrung hätten, sei der von ihm gewählte, kleinschrittige Lösungsweg sinnvoller. Er zeige „*das Prinzip*“, das der Aufgabe zugrunde liege.

3.3 Abschlussphase

Das Ende der Arbeitsphase fällt genau mit dem Ende der Stunde zusammen. Der Dozent stellt mit einem Blick auf die Uhr fest, dass er „*so gerade einigermaßen am Ende*“ sei, und kündigt an, mit welchem Thema und mit welchen Aufgaben er in der nächsten Stunde fortfahren werde. Damit beendet er die Stunde.

4. Die entstehende Anforderung

Das folgende Kapitel beschreibt die Anforderung, auf die der Dozent mit dem Lösen einer Übungsaufgabe reagiert. Zunächst handelt es sich um eine sehr allgemeine Anforderung: Neun Minuten vor dem Ende einer Stunde hat er das bisherige Thema abgeschlossen und muss nun den weiteren Unterrichtsverlauf festlegen. Er entscheidet sich, den Studierenden die verbleibende Unterrichtszeit für „*Fragen*“ zur Verfügung zu stellen. Die folgenden Aussagen von Maria, die sich als einzige äußert, bringen grundlegende Wissensdefizite in Bezug auf das Thema ‘Ungleichungen’ zum Ausdruck. Zugleich verdeutlicht die Studentin, dass das Thema für sie eine hohe Dringlichkeit hat.

Durch die Äußerungen Marias und das Ausbleiben weiterer Interaktionsbeiträge seitens der Studierenden nehmen die Anforderungen an den Dozenten konkrete Formen an. Das weitere didaktische und kommunikative Handeln des Dozenten muss insbesondere den folgenden Aspekten Rechnung tragen:

- **Reaktion auf die Äußerungen der Studentin:** Sein weiteres Handeln muss in irgendeiner Form die Äußerungen der Studentin aufgreifen. Da ihre Aussagen die einzigen verbalen Interaktionsbeiträge sind und überdies inhaltlich eine hohe Dringlichkeit signalisieren, kann der Dozent sie nicht ignorieren.

- **Vagheit:** Die Reaktion des Dozenten muss auch dem Umstand Rechnung tragen, dass die Äußerungen Marias inhaltlich sehr vage bleiben: Ihre Aussagen drücken ein sehr allgemeines Unverständnis aus.
- **Fragliche Repräsentativität:** Außer Maria äußert sich während der Transitionsphase niemand, obschon das Blickverhalten des Dozenten und die Gesprächspausen den übrigen Studierenden die Möglichkeit einräumen würden, ebenfalls einen Gesprächsbeitrag zu leisten. Es bleibt daher fraglich, inwiefern die Aussagen der Studentin die Relevanzen der ganzen Klasse wiedergeben.
- **Divergierendes fachliches Niveau:** Die grundlegenden Schwierigkeiten, die in der Aussage der Studentin zum Ausdruck kommen, stehen im Widerspruch zur Tatsache, dass das Thema ‘Ungleichungen’ zum Stoff der vorbereitenden Maturitätsstufe gehört. Es besteht also eine deutliche Differenz zwischen dem fachlichen Niveau, das die Frage der Studentin impliziert, und dem Niveau, das im Unterricht vorausgesetzt und eingefordert wird.
- **Zeitrahmen:** Das Zeitfenster des Stundenplans gibt schließlich vor, dass für die Bearbeitung der entstehenden Anforderung noch etwa acht Minuten der offiziellen Unterrichtszeit zur Verfügung stehen.

5. Analyse: Lösen einer Übungsaufgabe

Der Dozent reagiert auf diese unterschiedlichen Anforderungen, indem er zusammen mit den Studierenden eine Übungsaufgabe zum Thema ‘Ungleichungen’ löst. Das Verfahren, das dabei zur Anwendung kommt, soll nun detailliert nachgezeichnet werden.

Aufschlussreich ist dabei zunächst die konkrete Äußerung, mit welcher der Dozent (DO) das weitere Vorgehen ankündigt:

```
01 DO:  GUT dann zeig ich die UNgleichungen mal (2,5)
```

Er charakterisiert das Bearbeiten der Übungsaufgabe prospektiv als ‘die Ungleichungen zeigen’. Er benennt damit mit größtmöglicher Allgemeinheit das Teilgebiet, dem die folgende Übungsaufgabe entnommen ist. Auch der bestimmte Artikel (***die** UNgleichungen*) drückt eine Allgemeingültigkeit aus, die angesichts der Singularität der anschließend gelösten Aufgabe zunächst erstaunt.[4] Zudem bezeichnet der Dozent das weitere Vorgehen als ‘Zeigen’, also

[4] Vgl. zur Verwendung bestimmter und unbestimmter Artikel Linke / Nussbaumer / Portmann (2004, S. 248-250).

als eine Tätigkeit, die den Aspekt des Demonstrierens als für das Lösen der Übungsaufgabe charakteristisch ausweist.

Der Dozent rahmt also den weiteren Unterrichtsverlauf, indem er verdeutlicht, welchen Zielen sein weiteres Handeln verpflichtet ist. Gleichzeitig benennt er das Verfahren, das er realisieren möchte. Danach konkretisiert er, dass er das Verfahren des 'Ungleichungen-Zeigens' anhand von *AUFgaben* (Z. 2) realisieren möchte.

```
02 DO:  ähm DA hat es äh AUFgaben (--) JA (1,5)
03 DO:  aso FÜNF die ERSte grad einMAL
04 DO:  dass wir die (nochmals) (--) äh (.)
05 DO:  AUFschreiben (.) ja (--) also (1,5)
```

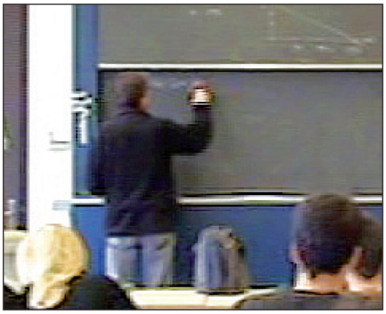
Dabei sticht die Implizitheit dieser Ankündigung ins Auge: Der Dozent erläutert oder begründet nicht, weshalb er das Thema anhand einer Aufgabe bearbeiten möchte. Das Lösen einer Aufgabe wird offenbar als das selbstverständliche Verfahren betrachtet, um ein mathematisches Thema exemplarisch zu 'zeigen'. Das unmarkierte Verhalten der Studierenden zeigt, dass sie das Lösen einer Aufgabe ebenfalls als situationsadäquat einschätzen. Auch die Adressierung seines Vorgehens bleibt implizit: Es bleibt unausgesprochen, für wen er die Aufgabe löst.

Der Dozent nennt nun die Nummer der Aufgabe, die er bearbeiten möchte, und stellt fest, dass er diese Aufgabe (*nochmals*) [...] *AUFschreiben* (Z. 4-5) möchte. Die Aussage ist in zweifacher Hinsicht interessant: Einerseits drückt der vermutete Wortlaut *nochmals* ein repetitives Moment aus, obschon die konkrete Aufgabe im Unterricht noch nicht thematisiert wurde. Das Lösen der Aufgabe erscheint dadurch als Repetition der Behandlung des (ganzen) Themas 'Ungleichungen'. Andererseits stellt die Formulierung ja eine neuerliche prospektive Beschreibung des folgenden Verfahrens dar: Dass der Dozent dabei das Verb *AUFschreiben* (Z. 5) verwendet, zeigt den hohen Stellenwert, den die schriftliche Dokumentation des Lösungswegs und der Resultate für das Verfahren hat.

Der Dozent nennt nochmals das Thema, dem er sich widmet, und notiert es als Titel an der Tafel (Bild 3):[5]

[5] Wo Gestik, Bewegungen, Blickverhalten und Körperhaltung für die Analyse relevant sind, werden sie im Transkript in Zwischenzeilen wiedergegeben. Die |Markierungen| geben dabei Anfang und Ende der Phänomene wieder, die in der darunterliegenden Zwischenzeile beschrieben werden. So fällt in Z. 6 die Notation des Wortes *Ungleichungen* mit seiner Verbalisierung und der anschließenden, 4,5-sekündigen Pause zusammen. In Z. 11 unterstreicht der Dozent das Wort *Ungleichungen*, während er das Wort *Beziehungen* ausspricht. Etc.

```
06 DO: |ungleichungen (4,5)|
       |notiert an der Tafel: Ungleichungen|
```



Ungleichungen

Bild 3: Tafelanschrieb in Z. 6.

Auch dieser Tafelanschrieb macht den exemplarischen Charakter von Übungsaufgaben deutlich. Geht man von einer grundsätzlichen Kongruenz von Titel und folgenden Ausführungen aus, so sind unter dem allgemeinen Titel ‘Ungleichungen’ allgemeine Erläuterungen zu erwarten. Dass hier auf den Titel eine konkrete Übungsaufgabe folgt, weist der Aufgabe in Bezug auf das im Titel genannte Thema eine hohe Repräsentativität zu.

Der Dozent nimmt nun eine theoretische Einordnung der Übungsaufgabe vor:

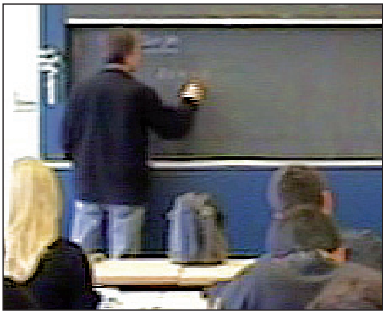
```
07 DO:  es geht halt jetz kapit
08 DO:  es sind ja LIneare ungleichungen
09 DO:  das heißt lineAre ausdrücke (--)
10 DO:  mit äh (2,5)
11 DO:  KLEIner oder GRÖSser (---) |beZIEhungen| (2,5)
                                   |unterstreicht das
                                    Wort Ungleichungen|
```

Mit diesen Erläuterungen verortet der Dozent die Übungsaufgabe innerhalb der Konzepte, die in den vorangehenden Stunden thematisiert wurden. Er hält fest, dass es nun um *LIneare ungleichungen* (Z. 8) gehe. Durch den Verweis auf *lineAre ausdrücke* (Z. 9) ordnet er die Ungleichungen jenem Thema zu, das Gegenstand der vorangehenden Stunden war. Er nennt zudem die Bedingungen, unter denen lineare Ausdrücke auch lineare Ungleichungen sind. Dabei umschreibt er die entsprechenden Merkmale von Ungleichungen sehr anschaulich (*mit* [...] *KLEIner oder GRÖSser* [...] *beZIEHungen*, Z. 10-11).

Der Dozent benennt und notiert nun die Aufgabe, die er lösen möchte (Z. 12-13), und beginnt, diese von seinen Unterlagen auf die Tafel zu übertragen (Z.14-16):

```
12 DO:  also (--) aufgabe (.) |fünf A (1,5)|
                              |notiert: 5a)|
13 DO:  |SEIte VIER (.) ja (---) ja: (.) also (.)
        |blickt abwechselnd in die Unterlagen
         und an die Tafel|
14 DO:  es heißt (--)|
15 DO:  |EINS (--) kleiner gleich X (---)
        |notiert: 1 ≤ x < 4|
16 DO:  kleiner vier (1,5)| (1) ja (--)
```

An der Tafel steht bisher die folgende Notation:



Ungleichungen

5a) $1 \leq x < 4$

Bild 4: Tafelanschrieb nach Z. 16.

Nach einer Gesprächspause (Z. 16) wendet er sich dann Maria (MA) zu, welche die ‘Ungleichungen’ in der Transitionsphase zum Thema gemacht hatte (Z. 17, Bild 5):

```
17 DO:  |das UND (.) verWIRRT? sie das UND (1,5)|
        |dreht sich zu Maria, blickt in die Unterlagen|
18 DO:  |(2)|
        |blickt Maria an|
19 MA:  ja NEIN das ist mir schon klar
20 DO:  [(das und)]
21 MA:  |[das ist] einfach das äh|
        |DO wendet sich zur Tafel|
```

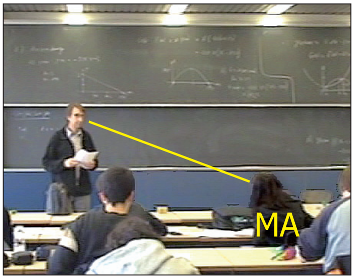


Bild 5: Blick zur Studentin Maria (Z. 18).

Der Dozent spricht Maria auf das Symbol $\wedge$ an, das im mathematischen Kalkül als additive Verknüpfung (d.h. als 'und') verwendet wird. Der Dozent erkundigt sich also primär danach, ob die Studentin mit dem verwendeten Notationssystem vertraut ist.

Die Studentin erwidert darauf, dass ihr die Notationsweise *schon klar* (Z. 19) sei. Für den Dozenten ist die Frage, ob die Studentin aufgrund der Notation *verWIRRT* (Z. 17) sei, damit offensichtlich abgeschlossen. Er wendet sich wieder der Tafel zu und setzt (schon in Z. 20) zu weiteren Erläuterungen an:

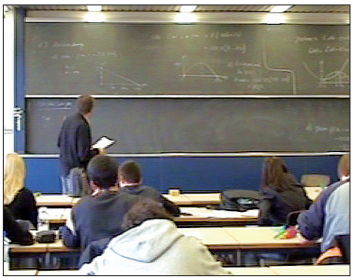


Bild 6: Blick zur Tafel (Z. 20).

Da auch die Studentin weiterspricht, kommt es zunächst zu simultanen Äußerungen (Z. 20/21). Der Dozent bricht seinen Gesprächsbeitrag zwar ab, unterbricht die Studentin dann aber an der nächsten geeigneten Stelle (*äh*, *Z. 21*) und führt das Gespräch selbst fort.[6] Sein Interesse scheint ausschließlich der Frage nach der Notation zu gelten und nicht dem weiteren Gesprächsbeitrag der Studentin. Auch der Blick des Dozenten, der in dieser Sequenz auf die

[6] Dass es sich bei diesem Sprecherwechsel um eine Unterbrechung handelt, wird durch die syntaktische Konstruktion, die gleichbleibende Sprechgeschwindigkeit und die konstante Tonhöhe des angefangenen Beitrags der Studentin deutlich. Vgl. dazu Selting (1995).

Studentin gerichtet war, wendet sich nun wieder der Tafel und im weiteren Interaktionsverlauf (ab Z. 24) der ganzen Klasse zu.

Der Dozent setzt zu einer Erläuterung des Terms '$1 \leq x < 4$' an, den er bereits an der Tafel notiert hat:

```
22 DO:  im prinzip kann man auch sagen
23 DO:  |X größer eins UND x kleiner vier|
        |zeigt mit dem Finger jeweils auf die
         entsprechende Variable resp. Zahl|
24 DO:  |da hat es AUCH SCHON ein UND dazwischen|
        |blickt in die Klasse|
25 DO:  es sind (eben) TOTAL VIER bedingungen (1)|
26 DO:  ja (3.5)
```

Er macht deutlich, dass er die Notation paraphrasieren möchte (*im prinzip kann man auch sagen*, Z. 22). Danach vollzieht er einen Umformungsschritt, der für die weitere Bearbeitung der Aufgabe zentral ist: Er löst den (einen) Ausdruck '$1 \leq x < 4$' in zwei Ungleichungen ('$1 \leq x$' und '$x < 4$') auf. Diese Umformung bringt er mehrfach zum Ausdruck: Er nennt die beiden isolierten Ungleichungen (*X größer eins* und *x kleiner vier*, Z. 23). Zudem hebt er prosodisch das *UND* (Z. 23) zwischen den beiden Ungleichungen hervor und bringt damit die Zäsur zum Ausdruck, die sich durch den Umformungsschritt ergibt. Auch gestisch kommt die Zäsur zum Ausdruck, indem er mit dem Zeigefinger zuerst auf die erste Ungleichung und danach auf die zweite Ungleichung deutet:

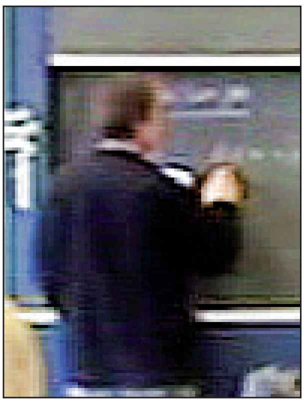


Bild 7: Zeigegeste zur linken Ungleichung (Z.23).

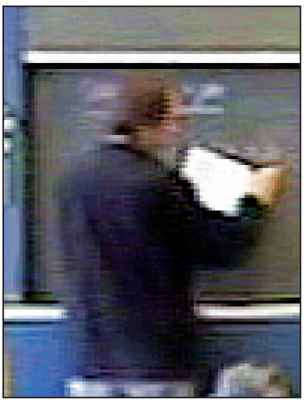


Bild 8: Zeigegeste zur rechten Ungleichung (Z. 23)

Der Dozent vergleicht schließlich die Aufschlüsselung in zwei Ungleichungen, die er innerhalb des Terms '$1 \leq x < 4$' vollzogen hat, mit dem in der Aufgabenstellung gegebenen Ausdruck:

$$(1 \leq x < 4) \wedge (0 \leq y \leq x)$$

Strukturell bestehe eine Ähnlichkeit zwischen dem Term und dem gesamten Ausdruck, da beide in zwei Teile zerfallen, die durch ein 'und' verbunden sind (*da hat es AUCH SCHON ein UND dazwischen*, Z. 24). Der Dozent weist darauf hin, dass sich der gegebene Ausdruck in insgesamt vier Ungleichungen (zwei aus dem Term $(1 \leq x < 4)$, zwei aus dem Term $(0 \leq y \leq x)$) aufschlüsseln lässt.

Die Erläuterungen des Dozenten dienen also dazu, die syntaktische Struktur des gegebenen mathematischen Ausdrucks zu verdeutlichen. Gleichzeitig greifen seine Ausführungen mit dem Aufschlüsseln des Ausdrucks in einzelne Ungleichungen einen für die weitere Bearbeitung der Aufgabe wichtigen Aspekt auf.

An den Ausführungen des Dozenten fällt auf, dass sie auf Symbole und Terme referieren, die er noch nicht an der Tafel notiert hat: Das Symbol $\wedge$ und den zweiten Teil des gegebenen Ausdrucks hat er noch nicht aus den Unterlagen an die Tafel übernommen. Da die Aufgabenblätter aber auch den Studierenden vorliegen, scheint dies die Kommunikation nicht zu beeinträchtigen.

Nachdem er sie bereits kommentiert hat, notiert der Dozent die noch fehlenden Teile der gegebenen Aufgabe an der Tafel.

```
27 DO:  |UND| (2)
        |notiert: ∧|
28 DO:  |NULL KLEIner GLEICH Y (--)|
        |notiert: 0 ≤ y|
29 DO:  |kleiner gleich X (--)|
        |notiert: ≤ x|
30 DO:  (aso sie können) ja (3)
31 DO:  (so) |(2)|
             |ergänzt die Notation mit Klammern:
              (1 ≤ x < 4) ∧ (0 ≤ y ≤ x)|
32 DO:  das AUFLÖsen in VIER (---)
33 DO:  solche UNgleichungen (--)
```

Ungleichungen

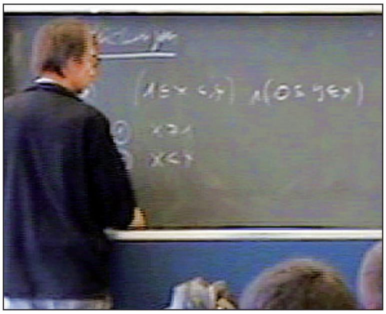
5a) $(1 \leq x < 4) \wedge (0 \leq y \leq x)$

Bild 9: Tafelanschrieb nach Z. 31.

Während er die Notation vervollständigt (Z. 27-29, 31; Bild 9), benennt er nun explizit die Umformung, die er zuvor anhand der Verknüpfungen diskutiert hat ((*aso sie können*) [...] *das AUFLÖsen in VIER* [...] *solche UNgleichungen*, Z. 30-33). Dies ist zugleich eine Ankündigung des nächsten Arbeitsschritts: Der Dozent beginnt nun, diese vier Ungleichungen untereinander zu notieren. Die Nummerierung, die er schriftlich und verbal realisiert, trägt dabei wesentlich zur Strukturierung der Interaktion bei:

```
34 DO:  also wir haben (-) (da) ERStens mal (.)
35 DO:  |ERStens (---)|haben wir (--)
        |notiert die Ordinalzahl ①|
36 DO:  X größer |(2) gleich| eins (1,5)
                 |notiert: x ≥ 1|
37 DO:  ZWEItens |(2)|
                 |notiert die Ordinalzahl ②|
38 DO:  am besten ist
39 DO:  sie schreiben alle bedingungen
40 DO:  der reihe nach auf (.)
41 DO:  denn bei JEder (-) beDINgung (.) bekommen sie
42 DO:  eine eine geRAde als begrenzungslinie (--)
43 DO:  (die) ZEICHnen sie dann separat AUF
44 DO:  die ZWEIte lautet
45 DO:  |(1,5) kleiner VIER| (2)
        |notiert x < 4|
```

Der Dozent ergänzt während seinen Äußerungen die Notation an der Tafel (Z. 34-36; 37 und 45), sodass das folgende Bild entsteht (Bild 10):



Ungleichungen

5a) $(1 \leq x < 4) \wedge (0 \leq y \leq x)$

① $x \geq 1$

② $x < 4$

Bild 10: Tafelanschrieb nach Z. 45.

Dazwischen kommentiert er das Vorgehen, indem er es als zielführend bezeichnet (*am besten ist*, Z. 38) und explizit benennt (*sie schreiben alle bedingungen der reihe nach auf*, Z. 39-40). Dabei fällt die zeitliche Positionierung dieser Hinweise auf: Sie formulieren diese Beschreibung nicht prospektiv als Ankündigung, sondern begleitend zu den Umformungsschritten.

Die zweite Aussage, die er während dieser Umformungen macht (*bei JEder* [...] *BeDINgung* [...] *bekommen sie eine eine geRAde als begrenzungslinie* [...] (*die*) *ZEICHnen sie dann separat AUF*, Z. 41-43), nimmt dann einen gänzlich anderen Status ein. Hier formuliert der Dozent, welche nächsten Bearbeitungsschritte aufgrund dieser Umformungen möglich werden: Er drückt aus, dass die notierten linearen Ungleichungen jeweils mit einer Grenzgeraden korrespondieren und dass sich diese Geraden in einem Koordinatensystem darstellen, d.h. 'aufzeichnen' lassen. Der Dozent nennt damit prospektiv die beiden Arbeitsschritte, die er nach dem vollständigen Auflisten der vier Ungleichungen (im Transkript ab Z. 56) ausführen möchte.

Der Dozent thematisiert nun auch die dritte und die vierte Ungleichung:

```
46 DO:  die DRITte |(1,5)| GLEIchung lautet dann
                   |notiert: ③|
47 DO:  |(1,5)|oder UNgleichung (--) lautet wie?
        |dreht sich zur Klasse|
48 DO:  |(1,5)|             |(--)|
        |blickt zur Tafel| |blickt in die Klasse|
49 DO:  |(1,5)|             |(2,5)|
        |blickt zur Tafel| |blickt in die Klasse|
50 ST:  y größer gleich [null]
51 DO:  |[y] größer gleich NULL| |(4)|
        |wendet sich zur Tafel|   |notiert: y ≥ 0|
```

An der Tafel stehen nun die folgenden Terme (Bild 11):

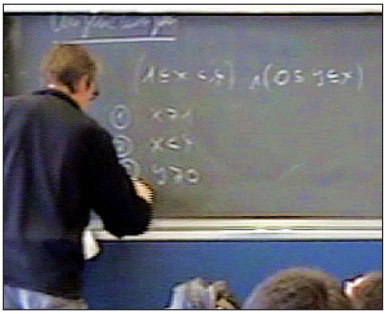


Bild 11: Tafelanschrieb nach Z. 51.

<u>Ungleichungen</u>

5a) $(1 \leq x < 4) \wedge (0 \leq y \leq x)$

① $x \geq 1$

② $x < 4$

③ $y \geq 0$

Nun fragt der Dozent nach dem vierten Term:

```
52 DO:  und die VIERte? |(2)| ja
                        |notiert: ④|
53 DO:  |(6)|
        |schiebt die Tafel nach oben|
54 DO:  |(---)|                |(2,5)|
        |blickt in die Klasse| |blickt zur Tafel|
55 MA:  |y kleiner gleich x|     |(2,5)|
        |DO blickt MA an, nickt| |blickt zur Tafel|
```

Er nimmt dabei nur noch eine strukturierende Funktion wahr, indem er die Nummerierung fortsetzt (Z. 46-47, Z. 52), und die Ungleichungen notiert (Z. 51, später Z. 56). Das Bestimmen der Ungleichungen überlässt er nun den Studierenden. Sein Blickverhalten und die langen Pausen machen deutlich, dass er die Ungleichungen nicht selbst formulieren, sondern dazu das Rederecht den Studierenden übertragen möchte.

Nachdem ein Student (ST) die dritte Ungleichung genannt hat, bringt sich Maria wieder in die Interaktion ein und nennt die vierte Ungleichung. Sie tut dies, ohne dass ihr der Dozent durch Blickkontakt, gestisch oder verbal das Rederecht erteilt. Der Dozent blickt vielmehr in die Mitte des Raumes (Bild 12), als Maria von sich aus das Wort ergreift. Erst danach blickt er sie kurz an (Bild 13).

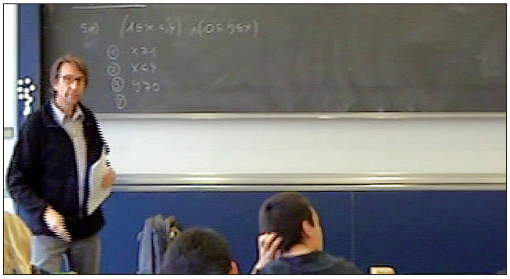


Bild 12: Blick in die Mitte des Raumes (Z. 54).

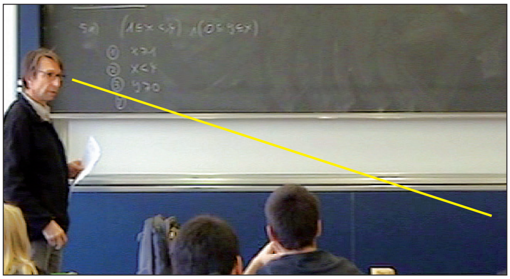
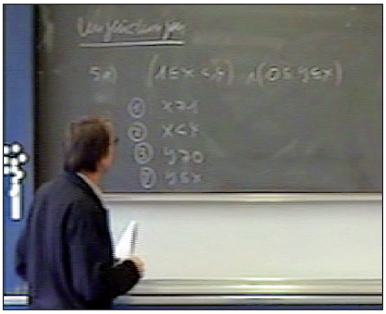


Bild 13: Blick zu Maria (Z. 55).

Nach dem kurzen Blick zu Maria wendet sich der Dozent sofort wieder zur Tafel und notiert die Ungleichung (Z. 56, Bild 14). Gleichzeitig leitet er thematisch zum nächsten Arbeitsschritt über, den er bereits früher angekündigt hat (Z. 56-58, vgl oben Z. 41-42):

```
56 DO:  |(1,5)|so (--) jetzt einfach
        |notiert: y ≤ x|
57 DO:  die beGRENzungs|geraden| (--)
                       |zeichnet mit einer Hand
                        eine Linie in die Luft,
                        blickt in die Klasse|
58 DO:  lauten |wie? (--)|
               |blickt zur Tafel|
```



<u>Ungleichungen</u>

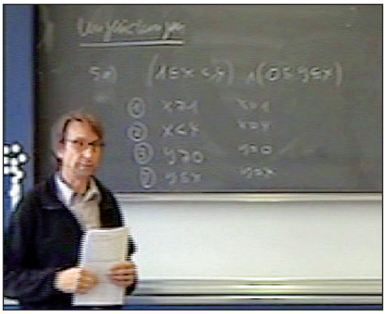
5a) $(1 \leq x < 4) \wedge (0 \leq y \leq x)$

① $x \geq 1$
② $x < 4$
③ $y \geq 0$
④ $y \leq x$

Bild 14: Tafelanschrieb nach Z. 56.

Der Dozent geht nun dazu über, für die vier Ungleichungen die jeweiligen Geradengleichungen der *beGRENzungsgeraden* (Z. 57) festzulegen. Er nennt die Überlegung, die für die Herleitung der Begrenzungsgeraden aus den Ungleichungen zentral ist („*Man nimmt einfach Gleichheitszeichen*“), und notiert neben den Ungleichungen die Geradengleichungen. Der Vollzug dieses Arbeitsschritts wird hier aus Platzgründen nicht detailliert nachgezeichnet.

Aus diesem zweiten Arbeitsschritt resultiert das folgende Tafelbild:



<u>Ungleichungen</u>

5a) $(1 \leq x < 4) \wedge (0 \leq y \leq x)$

① $x \geq 1$ $\quad x = 1$
② $x < 4$ $\quad x = 4$
③ $y \geq 0$ $\quad y = 0$
④ $y \leq x$ $\quad y = x$

Bild 15: Tafelanschrieb nach dem zweiten Arbeitsschritt (Notieren der Geradengleichungen der Begrenzungsgeraden).

Der Dozent nimmt nun den dritten Arbeitsschritt in Angriff, den er in Z. 43 ebenfalls schon angekündigt hat. Die vier Begrenzungsgeraden, die durch die vier Geradengleichungen an der Tafel gegeben sind, sollen nun grafisch dargestellt werden. Der Dozent zeichnet dazu ein Koordinatensystem an die Tafel und zeichnet die vier Geraden nacheinander ein. Dabei formuliert er erneut strukturierende Äußerungen und allgemeine Hinweise zum Vorgehen: Er weist darauf hin, wie das Koordinatensystem dimensioniert werden soll, und erläutert einen Teilschritt, der für das spätere Ermitteln der gesuchten Lösung notwendig ist („*Und dann würd' ich noch anschraffieren, auf welcher Seite eigentlich die Lösungen sind*“). Er gliedert das Vorgehen erneut durch eine Nummerierung, die er verbal und beim Einzeichnen der Geraden grafisch realisiert, und begründet diese Strukturierung („*Wenn mehrere Geraden im Spiel sind, brauchen Sie bisschen Ordnung*“). Den Verlauf der Geraden und die Position der gesuchten Punkte bezüglich dieser Geraden gibt er teilweise selbst vor, teilweise fordert er die Studierenden auf, diese Überlegungen zu formulieren.

Auch bei der Geradengleichung der vierten Begrenzungsgeraden ($y = x$) umschreibt ein Student den Verlauf der Geraden. Er verwendet dazu das anschauliche, aber fachsprachlich nicht etablierte Stichwort „*45°-Gerade*“. Der Dozent zeichnet die (zur x-Achse in einem Winkel von 45° stehende) Gerade ein.

Daraus resultiert die folgende grafische Darstellung:

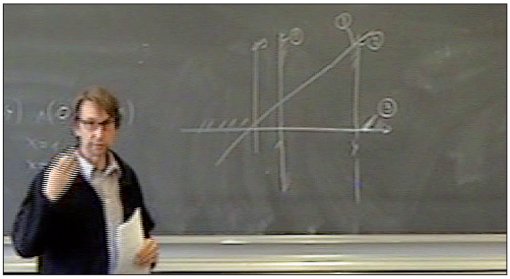


Bild 16: Grafische Darstellung nach dem Einzeichnen der Begrenzungsgeraden.

Nun meldet sich Maria ein weiteres Mal zu Wort (Z. 103):

```
100 DO:  |dann haben wir hier die VIERte (---)|
         |beschriftet die 4. Begrenzungsgerade mit ④|
101 DO:  und sie schraffieren auch AN
102 DO:  (---)|den lösungsbereich (2)|
              |blickt zur Klasse|
103 MA:  können sie die VIERte nochmals (.) erläu[tern]
```

Maria fragt hier nach der grafischen Entsprechung der Geradengleichung . Sie spricht damit geometrisches Grundlagenwissen an, das bereits in der Maturitätsschule vermittelt wird.[7] Nach einer Rückfrage (Z. 104) kommt der Dozent diesem Anliegen nach (Z. 106-108):

---

7 Vgl. Bundesamt für Berufsbildung und Technologie (2003, S. 33).

```
104 DO:  [y] gleich X? (---)
105 MA:  ja: (4)
106 DO:  y gleich eins mal x plus null
107 DO:  wenn sies so (2,5)
108 DO:  hat die steigung EINS (4,5)
```

Seine Argumentation ist dabei sehr formal und sehr implizit. Er überführt die Geradengleichung $y = x$ in die Funktionsform $y = 1x + 0$, in der aufgrund der allgemeinen Formel $y = mx + c$ die Steigung m der entsprechenden Geraden ersichtlich wird. Damit knüpft er an theoretisches Wissen aus den vorangehenden Stunden an.

Der weitere Interaktionsverlauf weist darauf hin, dass Maria diese knappe Erklärung nicht nachvollziehen kann. Nach der Äußerung des Dozenten beginnt ein Gespräch zwischen zwei Studierenden, die wie die Studentin in der ersten Reihe sitzen. David (DA) erläutert Karin (KA) leise, wie man aus der Geradengleichung $y = x$ die grafische Darstellung der Begrenzungsgeraden herleitet. Er zieht dabei eine andere Möglichkeit heran, den Verlauf der Geraden zu bestimmen, und berechnet für einzelne x-Werte die entsprechenden y-Werte („*x gleich eins, dann ist y gleich eins; x gleich zwei, dann ist y gleich zwei*"). So ergeben sich einzelne Punkte der Geraden: (1,1), (2,2) usw.

Der Dozent, der unmittelbar vor den beiden Studierenden steht (vgl. Abb. 17), verfolgt diese Erklärung. Er bestätigt durch eine leise Bemerkung („*ja*") deren Richtigkeit und wendet sich wieder der Tafel zu. Durch eine deutlich lauter gesprochene Frage („*Also, welche Seite ist Lösung?*") signalisiert er die Fortsetzung des offiziellen Unterrichtsdiskurses. Auch inhaltlich knüpft er dabei an seine letzte Äußerung vor Marias Frage an (Z. 101).

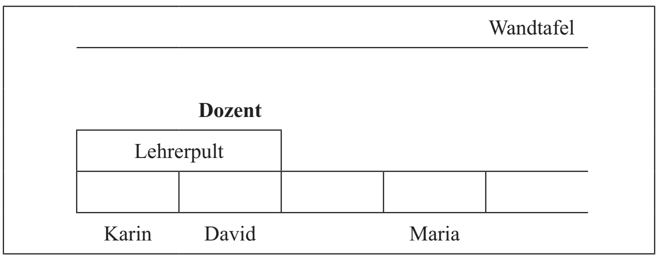


Bild 17: Sitzordnung und Position des Dozenten (Z. 103-108).

Maria hat ihren Blick während dieser Sequenz auf David und Karin gerichtet. Zwischen ihr und David ist ein Platz frei. Nachdem sich der Dozent wiederum der Tafel zugewendet hat, beginnt sie ihrerseits ein leises Gespräch mit David

– vermutlich erklärt er nun auch ihr die grafische Darstellung von $y = x$. Diese Nebenkommunikation hält parallel zum offiziellen Unterrichtsdiskurs über längere Zeit an. Maria steht dabei sogar auf, macht einen Schritt auf David zu und unterhält sich in gebückter Haltung mit ihm:

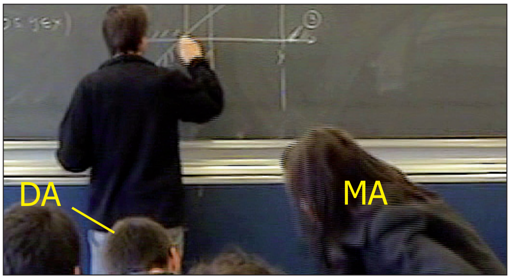


Bild 18: Maria unterhält sich stehend mit ihrem Sitznachbarn David.

Der Dozent geht nun zum letzten Lösungsschritt über: Er thematisiert die Frage, welche Punkte im Koordinatensystem alle geforderten Bedingungen erfüllen; die Menge dieser Punkte stellt die eigentliche Lösung der Aufgabe dar. Auch hier erarbeitet er die Lösung, indem er selbst strukturierende und kommentierende Äußerungen macht und die Lösungsmenge im Koordinatensystem einzeichnet, zentrale Überlegungen aber von den Studierenden formulieren lässt.

Der Dozent zeichnet schließlich die Lösungsmenge ein, die Aufgabe ist somit gelöst:

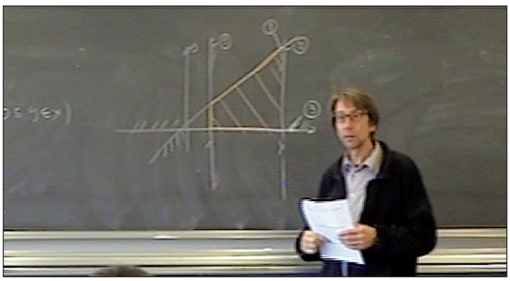


Bild 19: Fertiggestellte Lösung der Übungsaufgabe.

Nun stellt ein weiterer Student, Patrick (PA), eine Frage zum gewählten Lösungsweg:

```
200 PA:  [sie]
201 DO:  [man sagt] dem auch (.) ja?
```

```
202 PA:  |aber mit mit dem wenn ich ein strahl
         |DO blickt PA an|
203 PA:  jetzt aufzeichne (---) von null bis vier (.)
204 PA:  dann könnts ja viel EINfacher aufzeichnen
205 PA:  als jetzt mit den graden (wie)|
```

Der Student, der aufgrund anderer Wortmeldungen zu den besten Studierenden der Klasse zu zählen ist, macht hier geltend, dass die besprochene Aufgabe durch ein kürzeres Verfahren *viel EINfacher* (Z. 204) gelöst werden könnte. Der Dozent begründet daraufhin, weshalb er sich für das gewählte Verfahren entschlossen hat:

```
206 DO:  (---) ja wissen sie (---)
207 DO:  es ist jetzt die übung (.)
208 DO:  |für einige von ihnen war das da|
         |blickt PA an|
209 DO:  die ERSte übung dieser art (1,5)
210 PA:  okay (.)
211 DO:  mit der |ZEIT| kürzt man ab (.)
                 |hebt kurz die Hand|
212 DO:  sieht man SOfort dass das
213 DO:  ein paralLELstreifen  ist (-)
214 PA:  mhm (1,5)
215 DO:  aber (---) das prinzip ist so
216 DO:  dass sie die alle beGRENzungslinien
217 DO:  eigentlich AUFzeichnen (2,5)
218 DO:  |grundsätzlich|
         |zuckt mit den Schultern|
219 DO:  und wenn sie vereinfachungen sehen (.)
220 DO:  ist es nicht verboten
221 PA:  mhm
```

Der Dozent räumt implizit ein, dass man die fragliche Aufgabe effizienter lösen könnte. Er verweist aber darauf, dass der gewählte Lösungsweg im aktuellen Kontext didaktisch sinnvoller sei, weil er alle Lösungsschritte einzeln aufzeige und nicht – wie der Vorschlag des Studenten – bereits mehrere Teilschritte zusammenfasse. Der gewählte Lösungsweg zeige *das prinzip* (Z. 215), mit dem sich vergleichbare Aufgaben *grundsätzlich* (Z. 218) lösen lassen.

Der Dozent zögert erheblich ((---) *ja wissen sie* (---), Z. 206), bevor er zu seinen Ausführungen ansetzt. An seiner Formulierung fallen insbesondere die allgemeinen Personenbezeichnungen auf: Für Studierende, für welche dieser Aufgabentypus neu ist, wählt er die Bezeichnung *einige von ihnen* (Z. 208), für Studierende, die solche Aufgaben problemlos lösen können, wählt er u. a. das Pronomen *man* (Z. 211, Z. 212). Der Dozent ist also offensichtlich bemüht, vorhandene Wissensunterschiede als allgemeines Phänomen und nicht als Spezifikum der Klasse darzustellen.

Das Einzeichnen der Lösungsmenge und die Frage des Studenten fallen ziemlich genau mit dem offiziellen Ende der Stunde zusammen. Der Dozent kündet nach einem Blick auf die Uhr an, mit welchem Thema und welchen Übungsaufgaben er in der folgenden Stunde fortfahren möchte, und schließt den Unterricht ab (Bild 20). Eine Nachfrage bei Maria, ob das ‘Zeigen’ der Ungleichungen für sie hilfreich war, erfolgt dabei nicht.

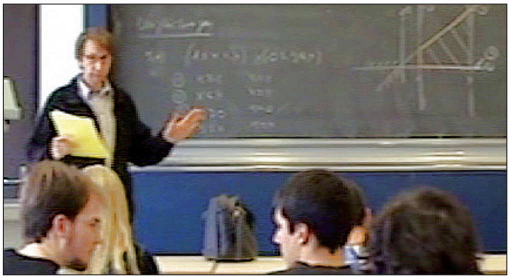


Bild 20: Ende der Stunde.

6. Das Verfahren ‘Mathematik zeigen’

Aufgrund der Analyse lässt sich das Lösen von Übungsaufgaben als zentrales Verfahren des Mathematikunterrichts in seiner Fach- und Stufenspezifik konturieren. Im Folgenden werden die Funktion, die konstitutiven Eigenschaften, die Adressatenorientierung sowie die Chancen und Risiken des Verfahrens diskutiert.

6.1 Übungsaufgaben als Möglichkeit, ‘Mathematik zu zeigen’

Zunächst fällt auf, welcher hohe Stellenwert und welche Funktion dem Lösen von Übungsaufgaben in der betrachteten Unterrichtssequenz zugeschrieben wird. Für den Dozenten stellt das Lösen einer Übungsaufgabe das geeignete

Verfahren dar, auf das Anliegen der Studentin und die daraus resultierende Anforderung zu reagieren. Das Bearbeiten einer Übungsaufgabe erscheint fraglos als adäquate 'Antwort' auf eine 'Frage', in der zum Ausdruck kommt, dass eine Studentin mit einem Thema „*gar nichts anfangen*" kann. Auch andere Beobachtungen deuten darauf hin, dass das Lösen einer Aufgabe als hochgradig situationsadäquat eingestuft wird: So wird es seitens des Dozenten nicht weiter begründet und von den Studierenden offenbar in keiner Weise in Frage gestellt.

Die Übungsaufgabe, die der Dozent löst, repräsentiert dabei weitaus mehr als eine singuläre Problemstellung innerhalb eines mathematischen Themas. Dies zeigt der Titel „Ungleichungen", mit dem er den Tafelanschrieb einleitet (Bild 3), dies zeigt sich aber vor allem in der Formulierung, durch die der Dozent das Lösen der Aufgabe ankündigt: Indem er die Aufgabe löst, 'zeigt er die Ungleichungen'.

Das Lösen von Übungsaufgaben wird so zu einem Verfahren, das gleichsam für ein ganzes mathematisches Fachgebiet steht – es wird zur eigentlichen *Darstellung* der Mathematik. Was im Chemieunterricht das Experiment und im Biologieunterricht die Naturbeobachtung ist, scheint im Mathematikunterricht das Lösen von Aufgaben zu sein. Dafür spricht auch, dass die Theorievermittlung im Mathematikunterricht häufig darauf ausgerichtet ist, konkrete Aufgaben- und Problemstellungen zu lösen: Das Lösen von Übungsaufgaben erscheint so als letzte Stufe eines Prozesses, der mit jeder Stufe anspruchsvoller wird, und repräsentiert dadurch den ganzen Prozess.

6.2 Die Konstituenten des Verfahrens

Was aber macht der Dozent im betrachteten Unterrichtsausschnitt genau, wenn er die Übungsaufgabe löst?

In der Analyse wird deutlich, dass er 'mehr macht', als ein aus mathematischer Sicht effizientes Vorgehen nahelegen würde. Wer mathematisch etwas geübt ist, kann die gesuchte Lösungsmenge problemlos direkt aus der gegebenen Bedingung ablesen und in einem Koordinatensystem einzeichnen. Wenn der Dozent dennoch schrittweise vorgeht und mehrere Zwischenschritte notiert, ist dies didaktisch motiviert. In diesem Mehraufwand zeigen sich letztlich die Charakteristika des Verfahrens 'Ungleichungen zeigen'. Im Folgenden sollen daher die Konstituenten dieses Verfahrens aufgezeigt werden:

- **Einordnen**: Der Dozent ordnet die gestellte Übungsaufgabe in größere Kontexte ein und zeigt Zusammenhänge zum (erwarteten) Vorwissen der Studierenden auf.
- **Schwierigkeiten abklären**: Der Dozent spricht von sich aus Aspekte an, die nach seiner Einschätzung Verständnisschwierigkeiten verursachen könnten.
- **Strukturieren**: Strukturierende Elemente nehmen eine zentrale Position in den mündlichen und schriftlichen Kommunikationsbeiträgen des Dozenten ein. Seine Äußerungen und sein Tafelanschrieb bringen zum Ausdruck, dass er auf eine klare Gliederung seines Vorgehens großen Wert legt.
- **Arbeitsschritte charakterisieren**: Der Dozent charakterisiert und benennt die Arbeitsschritte, die zur Lösung führen.
- **Arbeitsschritte durchführen**: Schließlich ist auch das Durchführen der einzelnen Arbeitsschritte – das konkrete Benennen und Notieren einer Ungleichung oder das Einzeichnen einer Begrenzungsgeraden – wichtiger Teil des Verfahrens. Für diese Arbeitsschritte bindet der Dozent die Studierenden mehrmals in die Interaktion ein.
- **Fach(sprach)liches Niveau wechseln**: Die mündlichen Erläuterungen des Dozenten weisen eine erhebliche Varianz in Bezug auf ihr fachliches und fachsprachliches Niveau auf. Neben Fachbegriffen verwendet er auch stark alltagssprachliche Formulierungen, und neben anschaulich-lebensweltlichen Bildern für mathematische Elemente stehen fachlich elaborierte Konzeptionalisierungen.
- **Paraphrasieren**: Der Dozent lässt seinen Aussagen mehrmals bedeutungsähnliche Formulierungen folgen. Diese Paraphrasen reduzieren die fachliche und fachsprachliche Komplexität der ursprünglichen Formulierungen teilweise, teilweise erhöhen sie sie aber auch. In beiden Fällen bietet dies den Studierenden die Möglichkeit, einfache und elaborierte Darstellungen eines Sachverhalts gedanklich abzugleichen.

Diese Vielfalt lässt erkennen, dass ein didaktisch untermauertes Lösen einer Übungsaufgabe ein erstaunlich komplexes Verfahren ist. Es fällt auch auf, dass sich die einzelnen Verfahrensaspekte im konkreten Handeln des Dozenten nicht trennscharf abgrenzen lassen. Seine Äußerungen oszillieren zwischen einzelnen Aspekten, und auch die zeitliche Abfolge dieser Realisierungen nimmt nicht immer jene Gestalt an, die man aufgrund einer strengen, mathematisch-logischen Vorgehensweise erwarten würde. Hierin zeigen sich in prototypischer Form die Spezifika einer dem realen kommunikativen Handeln folgenden *De-facto*-Didaktik.

6.3 Adressatenorientierung

Mathematische Problemstellungen kann man in der Regel auf unterschiedliche Weise lösen. Bei der hier betrachteten Übungsaufgabe lässt unter anderem die Zahl der explizit realisierten Zwischenschritte einen großen Spielraum offen: Mit etwas Übung findet man die Lösung auch ohne das Notieren einzelner Zwischenschritte. Umgekehrt könnte man die Überleitungen zwischen den einzelnen Arbeitsschritten noch ausführlicher erläutern oder sogar schriftlich festhalten.

Wie ein Dozent beim Lösen von Übungsaufgaben in didaktischen Kontexten vorgeht, hängt also wesentlich davon ab, welches Vorwissen er bei den Lernenden voraussetzt. Das Lösen von Übungsaufgaben ist folglich ein Verfahren, das adressatenspezifisch realisiert wird. Für den betrachteten Ausschnitt stellt sich daher die Frage, welche Adressatenorientierung dem Handeln des Dozenten zugrunde liegt.

Da die Studentin Maria in der Transitionsphase als einzige die Gelegenheit nutzt, Fragen zu stellen, reagiert der Dozent mit dem Lösen der Aufgabe unmittelbar auf ihr Anliegen. Dies ließe die Folgerung zu, dass die Studentin die primäre Adressatin seiner Ausführungen ist. Die Analyse zeigt jedoch in mehrfacher Hinsicht, dass dies nur teilweise zutrifft.

Zunächst reagiert der Dozent in der Transitionsphase auf die Äußerungen der Studentin, die von sehr grundsätzlichen Problemen zeugt, nicht mit grundsätzlichen Erklärungen. Er erläutert das Thema nicht anhand einer einfachen Aufgabe, die er problemlos ad hoc konstruieren könnte, sondern greift auf die (vergleichsweise komplexen) Aufgaben im Übungsdossier zurück. Diese geben somit das Niveau vor, an dem er sich orientiert. Auch während der Rechenphase geht der Dozent nur bedingt auf die Beiträge und Anliegen der Studentin ein. So fragt er sie zwar explizit, ob sie die verwendete Notation kennt – hierin sieht er offenbar eine Schwierigkeit, die in der gegebenen Situation legitim wäre. Die weitere Äußerung, zu der sie ansetzt, greift er indes nicht auf. Auch auf die explizite Frage, die sie später stellt, antwortet er nur kurz und geht nicht weiter auf ihre Anliegen ein, obschon ihr nonverbales Verhalten deutlich macht, dass sie den fraglichen Arbeitsschritt nach wie vor nicht verstanden hat.

Sein Blick und seine Körperhaltung sind während der Arbeitsphase mehrheitlich auf die Mitte des Raumes (oder dann zur Tafel) ausgerichtet (z. B. Bilder 12, 16, 19). Da Maria in der vordersten Reihe sitzt, ist sie während der Rechenphase kaum noch in seinem Blickfeld. Anfangs richtet er sich mit der Frage nach dem ‘Und’ zwar noch explizit an sie, während der Rechenphase ist sie jedoch eine Studentin unter vielen: Als sie sich mit einer Antwort einbringt, muss der Dozent zunächst den Kopf drehen, um zu sehen, wer sich geäußert hat (Bild 12, Bild 13). Danach quittiert er ihre Antwort lediglich mit einem Nicken und blickt gleich wieder zur Tafel. Auch auf ihre Frage zum letzten Lösungsschritt geht er nur kurz ein, danach wendet er seine Aufmerksamkeit dem Gespräch ihrer beiden Banknachbarn zu, die diesen Lösungsschritt diskutieren.

Der Dozent richtet sich also weder inhaltlich noch körperlich-blicklich auf die Studentin und ihre Anliegen aus. Ihre Demonstration eines Nicht-Verstehens ist zwar Ausgangspunkt seiner Erläuterungen, und anfänglich wendet er sich auch mit einer expliziten Frage an sie. Danach verliert er sie aber – buchstäblich und im übertragenen Sinne – zunehmend aus den Augen.

Die Ausführungen des Dozenten weisen aber durchaus einen adressatenspezifischen Zuschnitt auf: Er geht kleinschrittig vor und variiert die Fachsprachlichkeit seiner Ausführungen. Seine Antwort auf die Frage des Studenten Patrick am Ende der Arbeitsphase bringt ebenfalls zum Ausdruck, dass sein Vorgehen auf Studierende mit geringerem Vorwissen ausgerichtet war.

Der Dozent scheint seine Ausführungen hier also kategorial auf Studierende eines Niveaus auszurichten, deren Vertreterinnen und Vertreter im Unterrichtsausschnitt nicht als solche erkennbar werden. Der Adressatenzuschnitt wird nicht situativ ausgehandelt, sondern scheint von der Interaktionssituation relativ unabhängig und vordefiniert zu sein. Die Studentin Maria adressiert der Dozent nur dort, wo dies auch im Rahmen einer solchen allgemeinen Adressatenorientierung möglich ist.

6.4 Chancen des Verfahrens

Das Lösen von Übungsaufgaben, wie es im betrachteten Ausschnitt realisiert wird, bietet mehrere Vorteile. Die vorangehende Analyse lässt die folgenden Chancen erkennen:

Das Lösen von Übungsaufgaben bietet zunächst die Möglichkeit, theoretische Kenntnisse zu wiederholen. In der betrachteten Aufgabe sind nicht nur Überlegungen zu Ungleichungen von Bedeutung, sondern auch Kenntnisse des mathematischen Notationssystems, Regeln zur grafischen Darstellung von Geraden usw. Übungsaufgaben sind also gut geeignet, um konzentriert und in kurzer Zeit unterschiedliche Konzepte zu thematisieren.

Übungsaufgaben bieten einer Lehrperson zudem eine einfache Möglichkeit, dem Unterricht eine implizite Adressatenorientierung zugrunde zu legen. Dies geschieht durch die Wahl der Übung, vor allem aber durch ihre Bearbeitung. Die Adressatenspezifik drückt sich etwa darin aus, welches Vorwissen vorausgesetzt und welche Teilschritte erläutert werden.

Das gemeinsame Lösen von Übungsaufgaben erhält damit auch einen Angebotscharakter: Es bietet allen Studierenden gleichermaßen die Möglichkeit, etwas zu lernen.

Im betrachteten Unterrichtsausschnitt bietet das Lösen einer Übungsaufgabe schließlich die Möglichkeit, gleichzeitig den unterschiedlichen Aspekten der komplexen Anforderung gerecht zu werden, die sich zuvor aus der Transitionsphase ergeben haben. Insbesondere kann der Dozent auf die Äußerungen von Maria reagieren, ohne sich ausschließlich mit ihrem Nicht-Verstehen zu befassen. Zwar wendet sich der Dozent zu Beginn der Rechenphase mit einer konkreten Frage an Maria, im weiteren Verlauf löst er die Aufgabe indes eher für die ganze Klasse.

Mit dem Lösen der Übungsaufgabe wahrt er auch Marias Gesicht:[8] In der Wahrnehmung der Klasse und in ihrer Selbstwahrnehmung erscheint ihre Frage als berechtigtes Anliegen, auf das der Dozent eingeht. Maria wirkt zudem als engagierte Studentin, die über das Unterrichtsgeschehen mitentscheidet.

6.5 Risiken des Verfahrens

Das gemeinsame Lösen von Übungsaufgaben kann auch Folgen haben, die aus didaktischer Sicht unerwünscht sind.

Ein erstes Risiko zeigt sich darin, dass Maria den Ausführungen des Dozenten gegen Ende der Arbeitsphase nicht mehr folgen kann. Dies ist gewissermaßen die Kehrseite der kategorialen Adressatenorientierung und der Selbstverantwortung, die als Merkmale des Verfahrens beschrieben wurden. Das Verfahren bietet wenig Raum, um sich den individuellen Schwierigkeiten einzelner, leistungsmäßig schwacher Lernender zu widmen. Ginge der Dozent – beispielsweise bei der Frage der Studentin am Ende der Arbeitsphase – umfassend auf individuelle Schwierigkeiten ein, würde dies zwangsläufig den gemeinsamen Lösungsprozess so stark verzögern, dass er kaum noch zu

[8] Vgl. dazu das Konzept des „Face“ in Brown/Levinson (1978).

überblicken wäre und überdies der gemeinsame Aufmerksamkeitsfokus der Klasse aufgelöst würde. Dass einzelne Studierende beim gemeinsamen Lösen von Übungsaufgaben 'verloren gehen', erweist sich als systembedingter Nachteil des Verfahrens.

Ein Dozent kann beim Lösen von Übungsaufgaben nicht nur 'zu schnell', sondern auch 'zu langsam' vorgehen. Ein kleinschrittiges Vorgehen dehnt den Lösungsprozess zeitlich aus, wodurch seine integrale Struktur schwerer erkennbar wird. Dass ein kleinschrittiges Vorgehen Studierende auch irritieren kann, zeigt sich prototypisch an der Nachfrage des Studenten Patrick. Eine der wesentlichen Leistungen einer Lehrperson besteht also darin, den Lösungsweg beim gemeinsamen Aufgabenlösen jeweils situations- und adressatenadäquat zu takten.

Ein weiteres Risiko, das ein gemeinsames Lösen von Übungsaufgaben birgt, liegt in der zeitlichen Dimension. Im analysierten Ausschnitt erreicht der Dozent die Lösung der Übungsaufgabe zwar ziemlich genau am Ende der Stunde. Seine wiederholten Blicke auf seine Armbanduhr lassen aber vermuten, dass dies keineswegs Zufall ist: Vielmehr dürfte er das Zeitmanagement hauptsächlich darauf ausgerichtet haben, die Übung in der verbleibenden Unterrichtszeit abzuschließen. Dafür spricht auch, dass er den Studierenden in der Arbeitsphase relativ wenig Freiraum lässt.

Das Lösen mathematischer Übungsaufgaben ist mit Anforderungen an das Zeitmanagement verbunden, die sich in anderen Fächern in dieser Form nicht ergeben: Eine einmal begonnene Aufgabe muss in der zur Verfügung stehenden Zeit zu einem vordefinierten Abschluss gebracht werden, und die Arbeitsschritte, die dazu nötig sind, lassen sich im Rahmen eines didaktisch sinnvollen Vorgehens nicht beliebig variieren. Das Verfahren 'Übungen lösen' kann nur begrenzt abgekürzt oder verlängert werden. Das Risiko, das Verfahren in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht abschließen zu können, ist höher als z.B. bei der Besprechung eines literarischen Textes im Sprachunterricht. Das Lösen von Übungsaufgaben im Plenum erweist sich bezüglich des Zeitmanagements also als anspruchsvoll.

Eine weitere Gefahr, die das gemeinsame Lösen von Übungsaufgaben birgt, macht ein Blick auf die Konstituenten des Verfahrens deutlich. Durch die genaue Analyse wird erkennbar – und darin liegt aus didaktischer Sicht eine der wesentlichen Stärken des hier gewählten Analyseansatzes –, dass der Dozent die Studierenden nur bei bestimmten Aktivitäten interaktiv einbindet. Er beteiligt sie bei der Durchführung konkreter Arbeitsschritte, während er die anderen Konstituenten des Verfahrens – insbesondere die Strukturierung des

Lösungswegs – selbst realisiert. Dieses Vorgehen mag im aktuellen Fall dem begrenzten Zeitrahmen geschuldet sein. Wird es zum allgemeinen Muster, birgt es die Gefahr, dass sich Lernende nur einen Teil jener Kompetenzen bewusst aneignen, die für das Lösen von Übungsaufgaben notwendig sind. Da der Dozent die Struktur des Lösungswegs selbst vorzeichnet, erscheint diese als selbstverständlich gegeben und erhält in der Interaktion – und vielleicht auch in der Wahrnehmung der Lernenden – nur wenig Aufmerksamkeit.

7. Alternativen zum Verfahren 'Ungleichungen zeigen'

Das analysierte Verfahren ist keinesfalls die einzige Möglichkeit des Dozenten, unter den gegebenen Bedingungen auf die Dokumentation des Nicht-Verstehens der Studentin zu reagieren. 'Ungleichungen zeigen' ist vielmehr eine motivierte Wahl aus einem Repertoire an Alternativen, von denen nachfolgend einige kurz skizziert werden sollen:

– **Vorzeitiges Unterrichtsende:** Statt den Studierenden neun Minuten vor dem offiziellen Ende der Doppelstunde die Möglichkeit zu bieten, „*Fragen*" zu stellen, könnte der Dozent den Unterricht schon zu diesem Zeitpunkt beenden. Dass eine gewisse Flexibilität bei den Unterrichtszeiten an der Fachhochschule durchaus üblich ist und ein vorzeitiges Ende daher eine echte Handlungsalternative darstellt, zeigen Vergleiche mit anderen Stunden.

  Indem sich der Dozent dennoch exakt an den Stundenplan hält, setzt er in zweifacher Hinsicht Signale: Einerseits signalisiert er die Bereitschaft, angesichts des Leistungsdrucks, mit dem die Studierenden konfrontiert sind, jede zur Verfügung stehende Minute zu nutzen. Andererseits signalisiert er aber auch die Notwendigkeit, dies zu tun. Er demonstriert gleichsam, dass die Studierenden ihre Mathematikkenntnisse bei jeder Gelegenheit (d.h. auch in den verbleibenden neun Minuten) vertiefen müssen, wobei er ihnen dabei unterstützend zur Seite steht.

– **Initiative Vorgabe des weiteren Unterrichtsverlaufs:** Der Dozent könnte auch auf eine interaktive Aushandlung des weiteren Unterrichtsverlaufs verzichten und diesen von sich aus vorgeben. Angesichts der Tatsache, dass das konkrete weitere Vorgehen schließlich trotz der Interaktion von ihm vorgeschlagen wird, erschiene dies *a prima vista* als effizienteres Verfahren. Dennoch bindet der Dozent die Studierenden durch die Möglichkeit, Fragen zu stellen, in den Entscheidungsprozess ein. Er signalisiert damit, dass die Studierenden bei der Unterrichtsgestaltung ein gewisses

Mitbestimmungsrecht haben und er bereit ist, im Rahmen des Möglichen auf ihre Bedürfnisse einzugehen.

- **Klärung der Verstehensprobleme der Studentin:** Die Schwierigkeiten, die Maria zum Ausdruck bringt, bleiben äußerst vage. Der Dozent könnte hier durch spezifische Fragen versuchen, eine klarere Vorstellung von diesen Schwierigkeiten zu erhalten: So könnte er zum Beispiel schon nach ihrer ersten Aussage fragen, welche Teilaspekte des Themas 'Ungleichungen' sie „*noch nie besprochen*" hätten, und nach ihrem Hinweis, dass sie „*mit den Übungen*" „*überhaupt nichts anfangen*" könne, könnte er fragen, ob ihr diese Schwierigkeiten bei einer konkreten Aufgabe bewusst geworden seien. Auf eine solche Klärung verzichtet er jedoch konsequent.
- **Weitere Interaktionsbeiträge einfordern:** Der Dozent könnte in der Interaktion darauf beharren, dass sich neben der Studentin weitere Studierende äußern. Als Gesprächsleiter könnte er explizit alternative Vorschläge zum weiteren Vorgehen oder Meinungsäußerungen zu den Beiträgen der Studentin einfordern. Von dieser Möglichkeit macht er indes keinen Gebrauch.
- **Theoretische Erläuterungen:** Schließlich könnte der Dozent auf die Aussagen der Studentin mit theoretischen Erläuterungen reagieren und z.B. das Konzept der Ungleichungen rekapitulieren und an einem einfachen Beispiel illustrieren. Zumindest die erste Äußerung der Studentin, dass sie Ungleichungen „*noch nie besprochen*" hätten, würde ein solches Vorgehen rechtfertigen.

Gemessen an den skizzierten Handlungsalternativen hat sich der Dozent für ein komplexes und implizites Verfahren entschieden, dessen Chancen und Risiken beschrieben worden sind. Im Vergleich zu den Alternativen weist es gewissermaßen ein Alleinstellungsmerkmal auf: Die Demonstration von Mathematik im konkreten Handeln. Die zurückliegenden Ausführungen haben deutlich gemacht, dass das Lösen von Übungsaufgaben ein universell einsetzbares Verfahren ist, mit dem auf sehr unterschiedliche und spezifische Anforderungen reagiert werden kann.

8. Fazit

Was 'macht' eine Lehrperson, wenn sie zusammen mit Schülern oder Studierenden an der Tafel eine Übungsaufgabe löst? Oder anders ausgedrückt: Was charakterisiert das Verfahren, das dabei *de facto* zur Anwendung kommt?

Auf diese Frage(n) gibt der vorliegende Beitrag eine empirisch fundierte Antwort.

Die Analyse zeigt, dass das Verfahren sehr unterschiedliche Aktivitäten umfasst, die in komplexer Weise zusammenspielen. Neben die aus fachlicher Sicht notwendige Notation von Termen und grafischen Elementen treten zahlreiche didaktisch motivierte Handlungselemente.

Die Analyse zeigt aber auch, dass das Verfahren Implikationen hat, die weit über eine reine Wissensvermittlung hinausreichen. Es enthält in der Weise, wie es hier realisiert wird, einen spezifischen Adressatenzuschnitt. Gleichzeitig erfüllt und reproduziert es die institutionellen Rahmenbedingungen einer Hochschule, indem es die Verantwortung für den Lernerfolg den Studierenden überträgt. Die Analyse zeigt, dass der Dozent den Unterricht nur punktuell auf individuelle Relevanzen ausrichtet.

Die Analyse fördert mit der *Vorgabe des fachlichen Niveaus* und der *Selbstverantwortung der Studierenden* zwei Aspekte zu Tage, welche für die Institution 'Hochschule' typisch sind. Im Gegensatz zur obligatorischen Schule, welche der individuellen Förderung des Einzelnen verpflichtet ist, fordern Hochschulen Leistungen unabhängig davon ein, ob diese von den Lernenden tatsächlich erbracht werden (können). Es liegt in der Verantwortung jedes resp. jeder Studierenden, diesen Anforderungen gerecht zu werden. Eine konsequente Selektion erscheint dann als logische Folge dieser Sachlage. Das kommunikative Handeln des Dozenten, das sich in der Analyse offenbart, spiegelt also wesentliche Merkmale der institutionellen Vorgaben wider, in denen er operiert.

Umgekehrt ist es konsequent, wenn die Studentin Maria gegen Ende der Arbeitsphase selbst aktiv wird, um bei ihrem Sitznachbarn weitere Erklärungen zu einem Arbeitsschritt zu erhalten. Sie nimmt damit die studentische Selbstverantwortung wahr, die im institutionellen Rahmen angelegt ist und auch durch das kommunikative Handeln des Dozenten relevant gesetzt wird. Konsequenterweise akzeptiert der Dozent dieses Vorgehen, obschon es der gängigen Vorstellung einer normalen 'Ordnung' im Klassenzimmer widerspricht (Bild 18).

Dass der Dozent darum bemüht ist, Maria aufgrund ihres Nicht-Verstehens nicht bloßzustellen, ist ein weiteres Spezifikum des Hochschulunterrichts: Die Lehrperson begegnet den Lernenden mit erkennbarer Höflichkeit, die von einer etwaigen Einschätzung ihrer fachlichen Leistungen unabhängig zu sein scheint.

Was lässt sich daraus nun für das professionelle Handeln in schulischen und hochschulischen Kontexten ableiten? Man kann davon ausgehen, dass viele Lehrpersonen die zahlreichen Elemente und Implikationen des Verfahrens, die durch eine genaue Analyse erkennbar werden, nur selektiv wahrnehmen. Das professionelle Bewusstsein erstreckt sich häufig auf fachliche und didaktische Aspekte – in einer Disziplin wie der Mathematik, in der „Didaktik und Logik [...] sozusagen identifiziert“ werden (Wittmann 1991, S. 669), dürfte diese Sichtweise besonders verbreitet sein. Diese Wahrnehmungsstrukturierung ist kein individuelles „Defizit“ der Lehrpersonen, sondern reproduziert die professionelle Sozialisierung der Lehrerausbildungsinstitutionen. Der vorliegende Beitrag zeigt indes, dass sich das Lösen von Übungsaufgaben in seiner situativen Realisierung nicht nur durch fachliche und didaktische Kriterien fassen lässt, sondern weitaus komplexer ist. Dieser Komplexität müssten die Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen und – in der Folge – die Lehrpersonen selbst stärker Rechnung tragen.

Die Analyse zeigt schließlich, dass das Lösen von Übungsaufgaben im Mathematikunterricht kein austauschbares Verfahren neben anderen ist. Es scheint das Unterrichtsfach ‘Mathematik’ vielmehr in exemplarischer Form zu repräsentieren – Übungen zu lösen wird zu einer Möglichkeit, ‘Mathematik zu zeigen’. Dies verdeutlicht nicht nur der betrachtete Unterrichtsausschnitt, sondern auch das *ceterum censeo* des Dozenten, das er in der analysierten Doppelstunde regelmäßig zum Ausdruck bringt:

```
300 DO:  JA (--) SO (.) WEIterÜben dann (--)
```

9. Literatur

Becker-Mrotzek, Michael / Vogt, Rüdiger (2009): Unterrichtskommunikation. Linguistische Analysemethoden und Forschungsergebnisse. 2. Aufl. (= Germanistische Arbeitshefte 38). Tübingen: Niemeyer.

Brown, Penelope / Levinson, Stephen C. (1978): Politeness. Some universals in language usage. (= Studies in Interactional Sociolinguistics 4). Cambridge: University Press.

Bundesamt für Berufsbildung und Technologie (2003): Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität. Kaufmännische Richtung. Bern: BBL.

Linke, Angelika / Nussbaumer, Markus / Portmann, Paul R. (2004): Studienbuch Linguistik. 5. Aufl. Tübingen: Niemeyer.

Maier, Hermann / Schweiger, Fritz (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: öbv & hpt.

Selting, Margret (1995): Prosodie im Gespräch. Aspekte einer interaktionalen Phonologie der Konversation. (= Linguistische Arbeiten 329). Tübingen: Niemeyer.

Wittmann, Erich Ch. (1991): Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis. In: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 12, S. 663-679.